MÁSODIK FORDULÓ – MEGOLDÁSOK

1. Luke Skywalker összeadta az összes olyan háromjegyű prímszámot, amelyben a számjegyek szorzata pontosan 10. Mennyit kapott eredményül?
*A három számjegy csak az 1, a 2 és az 5 lehet. Háromjegyű prím 2-re és 5-re nem végződhet, így csak az 1-es állhat az egyesek helyén. Két ilyen háromjegyű szám van, a 251 és az 521, mindkettő prím is, összegük **772**.*

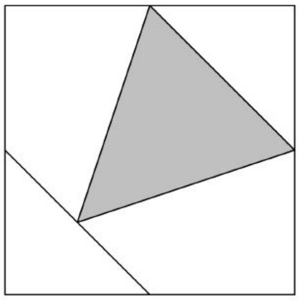
2. Pitagoraszi napnak nevezzük azokat a napokat, amikor a hónap és a nap számainak négyzetösszege az évszám utolsó két számjegye által alkotott kétjegyű szám négyzetét adja. Hány pitagoraszi nap volt eddig ebben az évszázadban?
Elég megnéznünk azokat a pitagoraszi számhármasokat, amelyek legnagyobb száma legfeljebb 18 (most 2018-at írunk…).
A Wikipédia alapján ezek a következők:

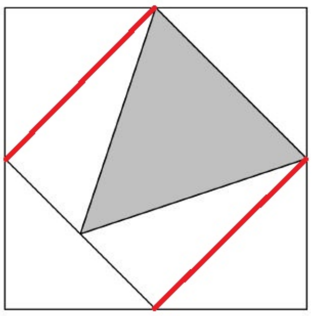
3	*4*	*5*
6	*8*	*10*
5	*12*	*13*
9	*12*	*15*
8	*15*	*17*

*A pirossal jelölt számhármas kiesik, mert az évszám utolsó két számjegye nem kétjegyű szám, igazából nem is szám a 05 karakter-sorozat, a kékkel jelöltek pedig fordítva is jók, tehát 4 + 3 = **7 ilyen nap volt** ebben az évszázadban, utoljára 2017. augusztus 15-én.*

(A pirossal jelölt számhármas elfogadásért 1 pontot vonunk le.)

3. Az öreg szegényember halála előtt az ábrán látható módon osztotta fel kis birtokát öt fia között. (A földdarab négyzet alakú, és a területek szakaszfelező pontok összekötésével keletkeztek.) A besötétített háromszög jelzi a legidősebb fiú részét. Hányadrészét kapta ő apja birtokának?





*Húzzunk be további felezőpontokat összekötő szakaszokat! A négy sarok területe egyenként $\frac{1}{8}$ rész, összesen $\frac{1}{2}$ rész. A középső négyzet területének a fele a besötétített háromszög területe, így **a legidősebb fiú a birtok $\frac{1}{4}$ részét kapja** örökségül.*

4. Micimackó a következő összeget írta fel a táblára: $2^{2018}+0^{2018}+1^{2018}+8^{2018}$. Malacka rájött, hogy ha a pontos összeget nem is, de annak utolsó jegyét mindenképpen meg tudja mondani. Mi ez a jegy?

A 0 és az 1 minden pozitív egész kitevős hatványa 0, illetve 1. Írjuk föl a 2 és a 8 néhány egymást követő pozitív egész kitevős hatványának (1-től kezdve) utolsó számjegyét: 2; 4; 8; 6; 2; 4; 8; 6 stb., illetve 8; 4; 2; 6 ; 8; 4; 2; 6 stb. Vegyük észre, hogy mindegyik négyes csoportokban ismétlődik. Mivel 2018 = 504·4 + 2, ezért ezen hatványok utolsó számjegye 4. Így ***a felírt szám utolsó számjegye*** *4 + 0 + 1 + 4 =* ***9****.*

5. Világszép királykisasszonynak három ládikája van, egy arany, egy ezüst és egy réz, az egyikben elrejtette az arcképét. Kérői közül az nyerheti el a kezét, aki kitalálja, hogy melyik ládika rejti a képet. A ládikákon a következő feliratok olvashatók:

Aranyládika: *A kép nem az ezüstládikában van.*
Ezüstládika: *A kép nem ebben a ládikában van.*
Rézládika: *A kép ebben a ládikában van.*

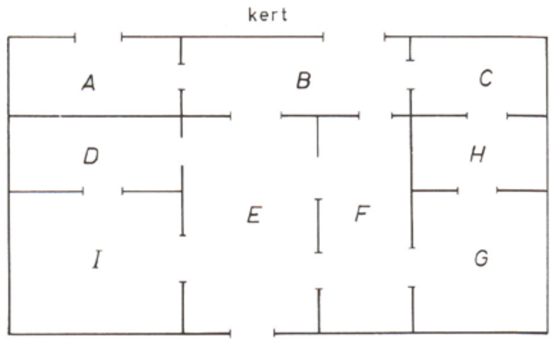
Tudjuk, hogy a feliratok között van igaz is, és van hamis is. Melyik ládikát válassza a szegényember legkisebb fia, ha feleségül szeretné venni Világszépet?

Az aranyládikán és az ezüstládikán lévő felirat egyszerre igaz vagy hamis, hiszen ugyanazt állítják. Ha tehát mindkét felirat állítása hamis, akkor a kép az ezüstládikában van. Ekkor azonban a harmadik felirat állítása is hamis, ami a feltételek szerint nem lehet. Ha mindkét felirat állítása igaz, akkor a harmadik felirat állítása hamis, tehát ***a kép az aranyládikában van****, emiatt azt kell választania a szegény ember legkisebb fiának.*

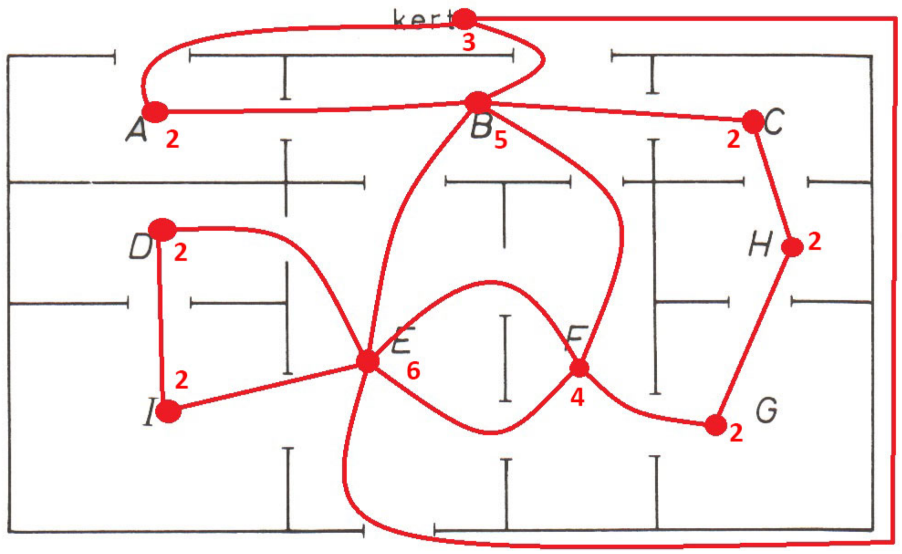
6. Nagyotmon Dóri boldogan újságolja barátainak, hogy születésnapjára egy olyan e-könyvolvasót kapott, amelybe akár nyolcszor is feltölthető az angol nyelvű Biblia. Erre Lefok Ozor megjegyzi: Az semmi, az enyémbe kétszer is fel lehet tölteni a legnagyobb ismert prímszámot. Lené Zénó erre csak annyit mond: Az semmi, az enyémbe akár hússzor is feltölthető Arany János összes műve. Kinek az e-olvasójába fér a legtöbb könyv?

Az angol nyelvű Biblia kb. 3 800 000 karakter, az Arany János összes kb. 1 800 000 karakter, a legnagyobb ismert prím 23 249 425 karakter, így ***Ozor e-olvasójába fér a legtöbb könyv****. (A méretek több forrásból, pl. Wikipedia, MEK, újságcikkek ellenőrizhetők.)*

7. Kovács úr házának alaprajzát az ábra mutatja.
Kovács úr elégedetten nézegeti a tapétát a falon, éppen most fejezte be szokásos ellenőrző körútját, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer haladt át. Hol van most?

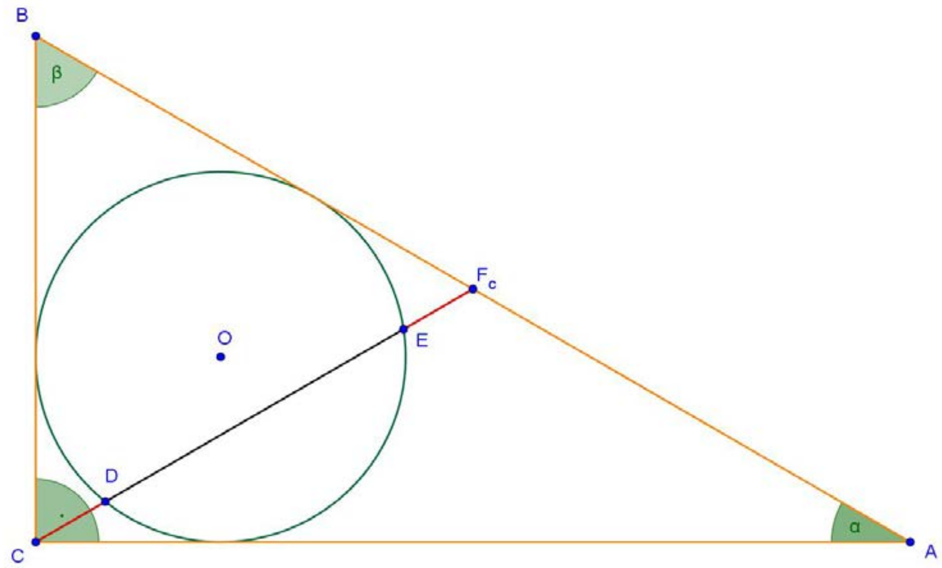


A feladat a jól ismert „rajzold meg egy vonallal úgy, hogy közben nem emeled fel a ceruzádat" típusba tartozik. Ez csak akkor tehető meg, ha 0 vagy 2 azon pontok száma, amelyekből páratlan vonal indul ki, egyik a séta kezdőpontja, a másik a végpontja (königsbergi hidak problémája, Leonhard Euler). Mivel ***Kovács úr*** *a séta végén a tapétát nézegeti, így* ***a B jelű helyiségben van****. (Ábra a túloldalon!)*

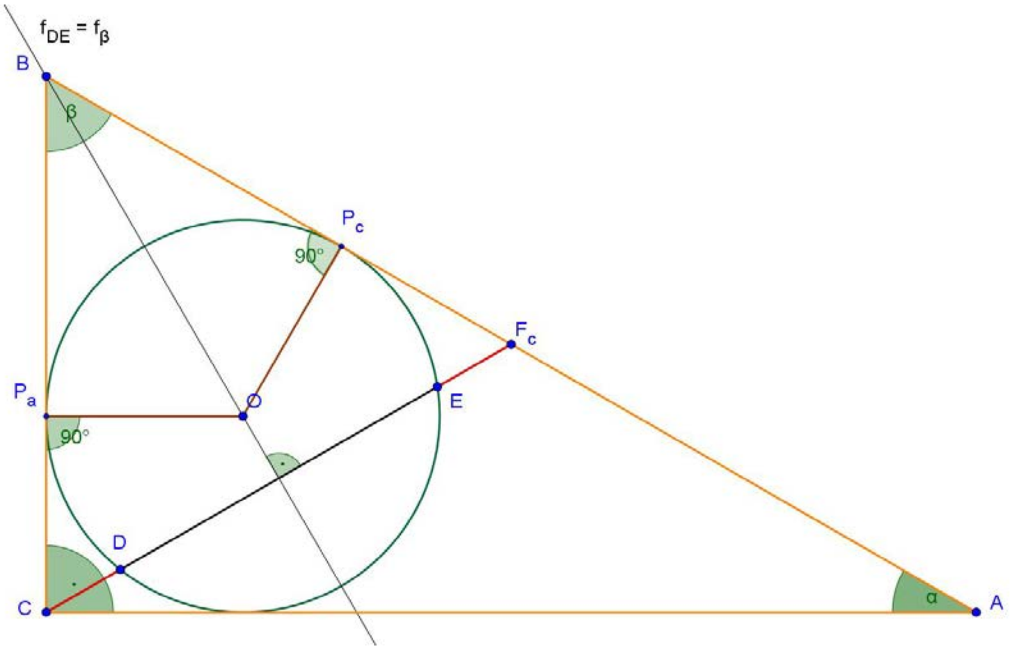


8. A Széchenyi gimnáziumban 11 fokú lépcső vezet fel a földszintről a félemeletre. Hányféleképpen lehet feljutni, ha egyszerre vagy egy vagy két fokot léphetünk?
A harmadiktól kezdve minden lépcsőfokra vagy az előzőről vagy a kettővel előzőről juthatunk fel, így a fellépések száma az e kettőre való fellépési számok összege. Az első lépcsőfokra egyféleképpen, a másodikra kétféleképpen juthatunk fel, így a fellépési számok sorozata: 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144 (ez a Fibonacci-sorozat egy részsorozata), tehát ***<u>144 féleképpen lehet feljutni a földszintről a félemeletre</u>****.*

9. Az ABC derékszögű háromszögben berajzoltuk az AB átfogóhoz tartozó súlyvonalat. Ennek metszéspontjai a háromszög beírható körével legyenek D és E. Mekkorák a háromszög szögei, ha $CD = EF_c$?



A megoldás a következő oldalon!



A feladat feltételei miatt O egyenlő távol van D-től és E-től, illetve C-től és F_c-től. Emiatt a beírt kör középpontja rajta van a DE és a CF_c szakaszok közös felezőmerőlegesén. Erre tükrözve a háromszöget a beírt körrel együtt kapjuk, hogy D és E, C és F_c, illetve P_a és P_c egymás tükörképei lesznek.

Emiatt a B csúcs is illeszkedik a közös felezőmerőlegesre, ezért a felezőmerőleges egyben a β *szög szögfelezője is. Így $BC = BF_c$.*

Mivel a derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja (Thalész tétele), ezért $CF_c = BF_c$ is, azaz a BCF_c háromszög egyenlő oldalú, így ***β = 60° és α = 30°****.*

Reméljük, jól szórakoztak a feladatsor megoldása közben!